INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Să se demonstreze că dacă ecuaţia de gradul al doilea: $ax^2+bc+c=0$ are rădăcini reale, atunci şi ecuaţiile: $(a+b+c)\cdot x^2+(b+2a)\cdot x+a=0$, respectiv $c\cdot x^2+(b-2c)\cdot x+a-b+c=0$ au rădăcini egale.

Soluţie:

Ecuaţia $ax^2+bc+c=0$ are rădăcini reale dacă $\Delta=b^2-4ac\geq 0$ 2p

Pentru ecuaţia $(a+b+c)\cdot x^2+(b+2a)\cdot x+a=0$, avem:

$\Delta_1=(b+2a)^2-4a(a+b+c)=b^2-4ac\geq 0 \Rightarrow$ are rădăcini reale 3p

Pentru ecuaţia $c\cdot x^2+(b-2c)\cdot x+a-b+c=0$ avem:

$\Delta_2=(b-2c)^2-4c(a-b+c)=b^2-4ac\geq 0 \Rightarrow$ are rădăcini reale 2p

2. Terasa unei cofetării are forma unui dreptunghi $ABCD$ în care $CD=8$ m, iar $tg(\measuredangle ABD)=1,75$.

a) Determinaţi suprafaţa terasei.

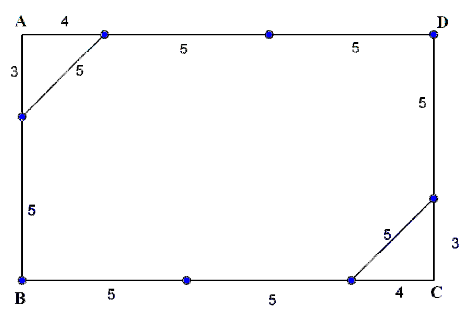
b) Patronul terasei a cumpărat opt arbuşti ornamentali pe care doreşte să-i dispună pe conturul terasei la distanţa de 5 m unul faţă de celălalt. Justificaţi daca poate face acest lucru, prezentând un mod de dispunere a acestora .

Soluţie:

a) În ΔABD, $m(\measuredangle BAD)=90^\circ$ obţinem $tg(\measuredangle ABD)=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{7}{4}$, de unde $AD=14$ m 2p

Finalizare : Aria terasei $ABCD=AB\times AD=112\ \text{m}^2$ 2p

b) Se pot dispune cei opt arbuşti , respectând cerinţa, ca în figura alăturata: 3p



3. Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC precum şi punctele $M\in[AB], N\in[BC]$ astfel încât $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{BN}{NC}=2$. Dacă P este un punct în planul triunghiului astfel încât $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{PC}$, atunci :

a) Demonstrați că punctele A, P şi C sunt coliniare.

b) Aflați $\frac{AP}{AC}$.

c) Demonstrați că $\sin(\measuredangle B) > \cos(\measuredangle C)$.

<u>Soluție:</u>

a) Deoarece $\frac{BN}{NC} = 2$, rezultă că $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$ 2p

Ținând cont că $\frac{AM}{MB} = 2$ va rezulta că $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}$, deci $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MB} + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$ 1p

Se obține $\overrightarrow{PC} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$, ceea ce conduce la concluzia dorită 1p

b) Din relația $\overrightarrow{PC} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$, deducem că $\frac{AP}{AC} = \frac{1}{3}$ 1p

c) Vom demonstra că $\sin\left(\hat{B}\right) - \cos\left(\hat{C}\right) > 0$

$\sin\left(\hat{B}\right) - \cos\left(\hat{C}\right) = \sin\left(\hat{B}\right) - \sin\left(90 - \hat{C}\right) = 2\cdot\sin\left(\frac{\hat{C}+\hat{B}-90}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}+90}{2}\right)$ 1p

Deoarece triunghiul este ascutitunghic rezulta ca $\sin\left(\frac{\hat{C}+\hat{B}-90}{2}\right) > 0$ si $\cos\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}+90}{2}\right) > 0$,

deci $2\cdot\sin\left(\frac{\hat{C}+\hat{B}-90}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}+90}{2}\right) > 0$ 1p

4. În ultimele trei turnee de tenis Simona Halep a disputat , în total , un număr impar de meciuri. Ştiind că fiecare meci a avut două sau trei seturi, numărul meciurilor disputate care au avut două seturi este mai mare decât numărul meciurilor disputate care au avut trei seturi , iar tenismena a disputat, în cele trei turnee, un număr total de 25 de seturi , se cere :

a) Câte meciuri a câte trei seturi pe meci a disputat tenismena ?

b) Câte meciuri a disputat tenismena în cele trei turnee?

<u>Soluție:</u>

Fie x - numărul meciurilor disputate în trei seturi şi y - numărul meciurilor disputate în două seturi. Atunci $x < y$ şi $x + y$ = impar 1p

Obține $3x + 2y = 25$ 1p

În mod necesar x trebuie sa fie număr impar 1p

Dacă $x = 1$ rezultă că $y = 11$, nu convine deoarece $x + y = 12$(par) 1p

Dacă $x = 3$ rezultă că $y = 8$ 1p

Dacă $x = 5$ rezultă că $y = 5$, nu convine deoarece trebuie $x < y$ 1p

Orice alt caz contravine cerinței $x < y$, deci singura soluție $x = 3$ şi $x + y = 11$ 1p

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Se consideră numărul $a=\log_4 27+\log_9 16$.

a) Demonstrați că $\frac{9}{4}<\log_4 27<\frac{5}{2}$.

b) Demonstrați că $\frac{5}{4}<\log_9 16<\frac{3}{2}$.

c) Calculați partea întreagă a numărului a.

Soluție:

a) $\frac{9}{4}<\log_4 27<\frac{5}{2}\Leftrightarrow \log_4 4^{\frac{9}{4}}<\log_4 27<\log_4 4^{\frac{5}{2}}$ 1p

$2^{\frac{9}{2}}<27<4^{\frac{5}{2}}\Leftrightarrow 2^9<27^2<4^5$, adevărat 2p

b) $\frac{5}{4}<\log_9 16<\frac{3}{2}\Leftrightarrow 3^{\frac{5}{2}}<16<9^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow 243<256<729$, adevărat 2p

c) Obținem $\frac{9}{4}+\frac{5}{4}<a<\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{7}{2}<a<4$ 1p

$\frac{7}{2}<a<4\Rightarrow [a]=3$ 1p

2. Se consideră numărul complex $z\neq 1$, astfel încât $\frac{1+z}{1-z}=i\sqrt{3}$.

a) Demonstrați că $z=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.

b) Verificați că $z^6=1$ şi $1+z+z^2+...+z^5=0$.

c) Calculați suma $S=1+z+z^2+...+z^{2016}$.

Soluție:

a) $\frac{1+z}{1-z}=i\sqrt{3}\Rightarrow 1+z=i\sqrt{3}-i\sqrt{3}\cdot z\Rightarrow z=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$ 2p

b) Prin calcul direct, deducem:

$z^3=-1$ 1p

$z^6=1$ 1p

$z^6=1\Leftrightarrow z^6-1=0\Leftrightarrow (z-1)(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

$z\neq 1\Rightarrow z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$ 1p

c) Grupând termenii sumei obținem:

$S=\left(1+z+...+z^5\right)+\left(z^6+...+z^{11}\right)+...+\left(z^{2010}+...+z^{2015}\right)+z^{2016}$ 1p

$S=0+z^{2016}=\left(z^6\right)^{336}\Rightarrow z=1$ 1p

3. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,a)$ şi $B(a,-2)$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Determinați a, astfel încât $AB = 4$.

b) Demonstrați că aria triunghiului AOB este $\mathcal{A}_{AOB}=\dfrac{a^2+4}{2}$.

c) Demonstrați că aria triunghiului AOB este minimă dacă şi numai dacă perimetrul triunghiului AOB este minim.

<u>Soluție:</u>

a) $AB=\sqrt{2\left(a^2+4\right)}$ 1p

$AB=4\Rightarrow\sqrt{2\left(a^2+4\right)}=4\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a\in\{-2,2\}$ 1p

b) $OA=OB=\sqrt{a^2+4}\Rightarrow\Delta AOB$ este isoscel 1p

OC înălțime în ΔAOB isoscel, $OC=\dfrac{\sqrt{2\left(a^2+4\right)}}{2}$ 1p

$\mathcal{A}_{AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot OC=\dfrac{a^2+4}{2}$ 1p

c) $\mathcal{P}_{AOB}=\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{a^2+4}$;

$\mathcal{A}_{AOB}=2,$ minimă atunci când a = 0 .... 1p

$\mathcal{P}_{AOB}=2\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)$ minim când a = 0 .... 1p

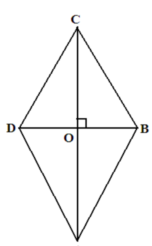
4. a) Demonstrați că $x+y\ge 2\sqrt{xy},\forall x,y>0$.

b) Un teren cu suprafața de 400 m^2 are forma unui romb şi trebuie să-l împrejmuim cu un gard. Demonstrați că lungimea gardului este cel puțin 80 m.

<u>Soluție:</u>

a) $x+y-2\sqrt{xy}=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\ge 0\Rightarrow x+y\ge 2\sqrt{xy}$ 2p

b)



Diagonalele unui romb sunt perpendiculare şi se înjumătățesc.

$\mathcal{A}_{ABCD}=\dfrac{AC\cdot BD}{2}$ 1p

Notăm $BO=a\Rightarrow 400=\dfrac{AC\cdot 2a}{2}\Rightarrow AC=\dfrac{400}{a}\Rightarrow OC=\dfrac{200}{a}$

$BC=\sqrt{a^2+\dfrac{40000}{a^2}}$ 1p

Folosind punctul a) $\Rightarrow BC\ge\sqrt{400}=20$ 2p

$\mathcal{P}_{ABCD}=4BC\ge 80$ 1p

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Se dă matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculați A^2, A^4 şi determinați cel mai mic număr natural $n\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea ca $A^n=I_2$.

b) Demonstrați că dacă matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ verifica ecuația $A\cdot X=X\cdot A$, atunci exista $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a+b\end{pmatrix}$.

c) Demonstrați că matricea X determinată la punctul anterior verifică egalitatea:
$X^2-(2a+b)\cdot X+(\det X)\cdot I_2=O_2$

<u>Soluție:</u>

a) $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}; A^4=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}; A^6=I_2\Rightarrow n=6$ 2p

b) $A\cdot X=\begin{pmatrix}c & d\\ -a+c & -b+d\end{pmatrix}$, $X\cdot A=\begin{pmatrix}-b & a+b\\ -d & c+d\end{pmatrix}$ 2p

$A\cdot X=X\cdot A\Rightarrow c=-b, d=a+b\Rightarrow X=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a+b\end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{R}.$ 1p

c) $X^2=\begin{pmatrix}a^2-b^2 & b^2+2ab\\ -b^2-2ab & a^2+2ab\end{pmatrix}$ 1p

Verifică egalitatea, prin calcul direct 1p

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=m\cdot e^{ax}+n\cdot e^{bx}+p\cdot e^{cx}$, $a,b,c\in\mathbb{R}^*$, $m,n,p\in\mathbb{R}$, cu proprietatea că $|f(x)|\le|\sin x|$, $\forall x\in(-1,1)$.

a) Calculați $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{kx}-1}{x}; k\in\mathbb{R}^*$.

b) Demonstrați că $m+n+p=0$.

c) Demonstrați inegalitatea $|ma+nb+pc|\le 1$.

Soluție:

a) $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{kx}-1}{kx}\cdot k=k\ln e=k$ 2p

b) $|f(x)|\le|\sin x|\Rightarrow\left|m\cdot e^{ax}+n\cdot e^{bx}+p\cdot e^{cx}\right|\le|\sin x|$, $\forall x\in(-1,1)$.

Pentru $x=0\Rightarrow|m+n+p|\le 0\Rightarrow|m+n+p|=0\Rightarrow m+n+p=0$ 2p

c) Putem scrie $\left|m\cdot\left(e^{ax}-1\right)+n\cdot\left(e^{bx}-1\right)+p\cdot\left(e^{cx}-1\right)\right|\le|\sin x|\Rightarrow$

$\left|\frac{am(\mathrm{e}^{ax}-1)}{ax}+\frac{bn(\mathrm{e}^{bx}-1)}{bx}+\frac{cp(\mathrm{e}^{cx}-1)}{cx}\right|\le\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ 2p

Trecem la limita pentru $x\to 0$ si obținem $|am+nb+cp|\le 1$ 1p

3. Se considera trei capitaluri proporționale cu numerele 3, 4, 6. Primul a fost plasat 60 de zile cu dobânda de 6%, al doilea 120 de zile cu dobânda de 9% iar al treilea 180 de zile cu dobânda de 12%. Dobânda simpla totala obținuta este de 510 euro, iar anul bancar are 360 de zile.
a) Sa se scrie sistemul liniar care descrie modelul matematic al problemei.
b) Determinați cele trei capitaluri.

Soluție:

a) Fie x, y, z cele trei capitaluri plasate. Avem $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{6}$ (1) 1p

și $x\cdot\frac{6}{100}\cdot\frac{60}{360}+y\cdot\frac{9}{100}\cdot\frac{120}{360}+z\cdot\frac{12}{100}\cdot\frac{180}{360}=510$ (2) 2p

Din (1) si (2) se obține sistemul liniar $\begin{cases}4x-3y=0\\3y-2z=0\\x+3y+6z=51000\end{cases}$ 2p

b) Rezolvam sistemul.

$\Delta=\begin{vmatrix}4&-3&0\\0&3&-2\\1&3&6\end{vmatrix}=102$, $\Delta_x=306000$, $\Delta_y=408000$, $\Delta_z=612000$. 1p

Finalizare; x = 3000 euro, y = 4000 euro, z = 6000 euro. 1p

4. Fie funcțiile $f:(\frac{1}{2},\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)$, $g:(\frac{1}{2},\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f'(x)$.
a) Studiați monotonia funcțiilor f si g.
b) Folosind teorema lui Lagrange pentru funcția f pe intervalul $[n, n+1]$, $n\in\mathbb{N}^*$, demonstrați că $g(n+1)<f(n+1)-f(n)<g(n)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție:

a) $f'(x)=\frac{4}{4x^2-1}>0$ 2p

$f'(x)>0,\forall x\in(\frac{1}{2},\infty)$, deci f este strict crescătoare pe intervalul $(\frac{1}{2},\infty)$ 1p

$g'(x)=f''(x)=\frac{-32x}{(4x^2-1)^2}<0,\forall x\in(\frac{1}{2},\infty)$, rezultă că g este strict descrescătoare pe intervalul $(\frac{1}{2},\infty)$

.... 1p

b) f este funcție Rolle pe [n, n+1], $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci conform teoremei lui Lagrange există
$c_n \in (n, n+1)$ astfel încât $f(n+1) - f(n) = f'(c_n) = g(c_n)$ 1p

Cum funcția g este strict descrescătoare avem: $g(n+1) < g(c_n) < g(n)$ 1p

Înlocuind $g(c_n)$ obținem $g(n+1) < f(n+1) - f(n) < g(n)$ 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Se consideră polinomul $f = x^4 - 8x^3 + ax^2 + 8x + b$, $f \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Arătaţi că $f(1) = 0$ dacă şi numai dacă $a + b + 1 = 0$.

b) Determinaţi valoarea numărului real a pentru care $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.

c) Determinaţi numerele reale a şi b astfel încât rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$ să fie în progresie aritmetică.

<u>Soluţie:</u>

a) $f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1 - 8 + a + 8 + b = 0 \Leftrightarrow a + b + 1 = 0$ 1p

b) Scrie relaţiile lui Viète 1p

Grupează convenabil şi obţine:

$$\begin{cases} (x_1 + x_4) + (x_2 + x_3) = 8 \\ (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + x_1x_4 + x_2x_3 = a \\ x_1x_4(x_2 + x_3) + x_2x_3(x_1 + x_4) = -8 \\ (x_1x_4) \cdot (x_2x_3) = b \end{cases}$$

.... 1p

Din prima relaţie şi condiţia dată rezultă că $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 4$ 1p

Din a doua şi a treia relaţie avem: $\begin{cases} x_1x_4 + x_2x_3 = a - 16 \\ x_1x_4 + x_2x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow a = 14$ 1p

c) $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ în progresie aritmetică , atunci există $z, r \in \mathbb{C}$ astfel încât:

$x_1 = z - 3r, x_2 = z - r, \ x_3 = z + r, x_4 = z + 3r$.

Din prima relaţie avem $4z = 8 \Rightarrow z = 2$

Relaţiile doi si trei devin $\begin{cases} 10r^2 + a = 24 \\ r^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 14 \\ r^2 = 1 \end{cases}$ 1p

Din ultima relaţie avem $(z^2 - 9r^2) \cdot (z^2 - r^2) = b \Rightarrow b = -15$ 1p

Observaţie: Ecuaţia devine $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 = 0$
Cu $z = 2$ şi $r = \pm 1$ avem rădăcinile $\div -1, 1, 3, 5$ (respectiv $\div 5, 3, 1 - 1$)

2. Se consideră inelul aritmetic al claselor de resturi modulo 9 , notat cu $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$.

a) Calculaţi suma în $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$: $s = \hat{1} \cdot \hat{2} + \hat{2} \cdot \hat{3} + \hat{3} \cdot \hat{4} + \hat{4} \cdot \hat{5} + \hat{5} \cdot \hat{6} + \hat{6} \cdot \hat{7} + \hat{7} \cdot \hat{8}$

b) Să se rezolve ecuaţia matriceală în inelul matricelor $M_2(\mathbb{Z}_9)$: $\begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{5} \\ \hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{1} \\ \hat{7} & \hat{8} \end{pmatrix}$

c) Arătați că matricea $A=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{c} & \hat{d}\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z}_9)$ este inversabilă dacă şi numai dacă $\det A\in\{\hat{1},\hat{2},\hat{4},\hat{5},\hat{7},\hat{8}\}$.

Soluție:

a) $s=\hat{1}\cdot\hat{2}+\hat{2}\cdot\hat{3}+\hat{3}\cdot\hat{4}+\hat{4}\cdot\hat{5}+\hat{5}\cdot\hat{6}+\hat{6}\cdot\hat{7}+\hat{7}\cdot\hat{8}=\hat{2}+\hat{6}+\hat{3}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{6}+\hat{2}=\hat{6}$ 1p

b) Calculează inversa matricei $\begin{pmatrix}\hat{4} & \hat{5}\\ \hat{3} & \hat{1}\end{pmatrix}$. Determinantul matricei este $\begin{vmatrix}\hat{4} & \hat{5}\\ \hat{3} & \hat{1}\end{vmatrix}=\hat{7}$.

Inversul lui $\hat{7}$ (modulo 9) este $\hat{4}$. Inversa matricei este $\begin{pmatrix}\hat{4} & \hat{7}\\ \hat{6} & \hat{7}\end{pmatrix}$ 2p

Obține soluția $X=\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{6}\\ \hat{1} & \hat{8}\end{pmatrix}$. 1p

c) Elementele inversabile din $(\mathbb{Z}_9,+,\cdot)$ sunt $\hat{1},\hat{2},\hat{4},\hat{5},\hat{7},\hat{8}$. 1p

Matricea A este inversabilă ceea ce implică $\det A$ diferit de zero şi de divizorii lui zero ai inelului. Prin urmare $\det A\in\{\hat{1},\hat{2},\hat{4},\hat{5},\hat{7},\hat{8}\}$ 1p

Reciproc, deoarece $\det A\in\{\hat{1},\hat{2},\hat{4},\hat{5},\hat{7},\hat{8}\}$, iar $\hat{1},\hat{2},\hat{4},\hat{5},\hat{7},\hat{8}$ sunt inversabile in inel, rezultă că matricea este inversabilă. 1p

3. Se consideră numerele $I(a)=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+ax+1}dx$ şi $J(a)=\int_0^1\frac{1}{e^x+ax+1}dx$, unde $a\in[0,+\infty)$ este parametru.

a) Calculați $I(0)$.

b) Calculați $J(0)$.

c) Determinați numărul real pozitiv a pentru care este adevărată relația: $I(a)+a\cdot J(a)=2$

Soluție:

a) $I(0)=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\ln(e^x+1)\Big|_0^1=\ln\frac{e+1}{2}$ 2p

b) $I(0)+J(0)=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx+\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx=\int_0^1\frac{e^x+1}{e^x+1}dx=\int_0^1 dx=1$ 1p

$J(0)=1-I(0)=1-\ln\frac{e+1}{2}=\ln\frac{2e}{e+1}$ 1p

(sau calculează direct $J(0)$)

c) $I(a)+aJ(a)=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+ax+1}dx+a\int_0^1\frac{1}{e^x+ax+1}dx=\int_0^1\frac{e^x+a}{e^x+ax+1}dx=$ 1p

$=\ln(e^x+ax+1)\Big|_0^1=\ln\frac{e+a+1}{2}$ 1p

$\ln\frac{e+a+1}{2}=2\Leftrightarrow e+a+1=2e^2$. Soluția este $a=2e^2-e-1>0$ 1p

4. Rata cu care o familie utilizează, într-o zi, energia electrică (în kW / oră) este $K(t)$ dată de relația $K'(t)=5t\cdot e^{-t}$, unde $t\in[0;24]$ este timpul exprimat în ore.

a) Câți kW foloseşte familia în primele 4 ore ale zilei?

b) Câți kW consumă familia în 30 de zile?

(În calcule se va lua $e \simeq 3$. Rezultatele se vor exprima sub formă zecimală cu două zecimale exacte.)

<u>Soluție:</u>

Consumul pentru primele 4 ore este dat de $\int_0^4 K^{/}(t)dt = \int_0^4 5te^{-t}dt$ 2p

Calculează $K(\mathrm{t})\Big|_0^4 = \int_0^4 5te^{-t}dt = 5(-te^{-t}\,|_0^4 - e^{-t}\,|_0^4) = 5(1-5\cdot e^{-4})$ 2p

Calculul aproximativ al consumului de energie electrică pentru primele 4 ore (cu $e \simeq 3$) este $5(1-5\cdot e^{-4}) \simeq 4,69$ kW. 1p

b) Într-o zi se consumă $4,69\cdot 6 = 28,14$ kW.

În 30 de zile familia va consuma $(4,69\cdot 6)\cdot 30 = 844,2$ kW 2p